

## 変位制約がある構造物の最適設計に関する研究

小 西 保 則\*・小 村 司\*\*

## Optimum Design for Structure with Restriction of Displacement

by

Yasunori KONISHI\* and Tsukasa OMURA\*\*

In the present study, the optimum design for a structure which is restricted from displacement is performed with respect to minimum volume.

The method of stiffness matrix is used for stress analysis.

In comparison with the SLP method, the present method is effective for the design of a cross section area of a structure with a restriction of displacement. In case the minimization of the objective function is restricted with displacement, it is possible to do an optimum design economically with the aid of another method (i. e., the SLP method or the SUMT method).

## 1. まえがき

構造物が長大化し複雑になると変数・制約条件式共にその数が多くなるが, Suboptimization によれば, その場合でも容易に最適設計が可能であり, 単純トラスの応力制限が支配的な場合について, 目的関数には全工場製作費を考慮した場合の最適設計を行った結果については先に発表した<sup>1), 2)</sup>. しかし変位制約が支配的な場合については, 断面寸法の変化が, 各部材の変形に影響し, その変形による全体の変位に対する各部材の変位の配分が変化するため, 最適断面の近似値しか求まらない. そこで全体構造について, 最適性規準を用いて<sup>3)</sup>, 変位制約がある場合の各部材の最適断面積を求め, その後に Suboptimization により各部材の最適値を求めることによって精度のよい最適値を求めることが出来る. 本論文では変位制約の最適性規準を用いて, 変位制約のある場合の各部材の最適設計を行った結果と SLP 法により最適設計を行った場合の比較について述べる.

## 2. 最適性規準による最適設計手法

荷重系  $P$  が作用する構造を考える.  $P$  は複数の荷重成分により構成されているものとする. 内力  $F$  を応力と設計変数 (軸力時は断面積) との積とすると, 外部荷重系  $P$  によって生じた部材要素内力は  $F^p$  として表わされる. またこれに関連する, 構造の各節点における変位を  $\delta$  とする. 一般化された変位の値は, 一般化された仮想荷重の方法を用いれば, 計算することが出来る. いま  $n$  個の要素によって構成される構造のある節点および変位方向における一般化された変位系をとり, これに対応する仮想荷重系  $Q$  を載荷するものとする. 仮想仕事  $T$  は

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{F_i^p F_i^q L_i}{A_i E_i} = Q^T \delta \quad (1)$$

ただし  $F_i^q$  は仮想荷重系  $Q$  による  $i$  部材の内力,  $A_i$ ,  $E_i$  は  $i$  部材の断面積および剛性係数であり,

昭和58年 4 月30日受理

\*土木工学科 (Department of Civil Engineering)

\*\*荒谷建設コンサルタント(株) 広島市中区 (Aratani Construction Consultant Co., Ltd., Hiroshima)

$$L_i = V_i/A_i \quad (2)$$

である。ここに  $V_i$  は  $i$  要素の体積、 $L_i$  はトラス部材の場合  $i$  部材の部材長である。単一の単位荷重としての仮想荷重を考えると、式(1)の  $T$  は、荷重点の変位そのものを表わす。

さて構造の設計変数を二つのグループ、すなわち、能動要素および受動要素に分ける。能動要素とは、変位制約のある最適設計を行う場合に断面積  $A_i$  が変化する必然性のある部材要素であり、受動要素は、不変な部材要素である。そこで(1)式は次の形に表わされる。

$$T = \sum_{i=1}^m \frac{F_i^p F_i^q L_i}{A_i E_i} + \sum_{i=m+1}^n \frac{F_i^p F_i^q L_i}{A_i E_i} \quad (3)$$

ただし第一項は  $m$  個の受動要素に関するものである。

その後の計算で受動要素に関する項は不変であるので受動要素に関する仮想仕事を  $T_0$  と表示する。すなわち

$$T = T_0 + \sum_{i=m+1}^n \frac{F_i^p F_i^q L_i}{A_i E_i} \quad (4)$$

構造物の重量  $W$  は次式で与えられる。

$$W = \sum_{i=1}^n V_i \rho_i = \sum_{i=1}^n A_i L_i \rho_i \quad (5)$$

ここで  $\rho_i$  は材料の重量密度である。これを能動、受動要素のグループに分けると

$$W = W_0 + \sum_{i=m+1}^n A_i L_i \rho_i \quad (6)$$

となる。ただし、 $W_0$  は受動要素グループの重量を表わす。

荷重系  $Q$  による仮想仕事量の許容量を  $T^*$  とすると

$$T^* = \sum Q_j \delta_j = Q^T \delta \quad (7)$$

とかける。ただし記号  $\delta$  は、一般化された系の全項にわたるものとする。

一般化された変位が規定値  $T^*$  となる最小重量構造は等式制約

$$T = T^* \quad (8)$$

に対する  $W$  の停留値を求めることにより決定される。このような等式制約を含む最適問題には、Lagrange 乗数法が適用できるから、Lagrange 乗数  $\lambda$  によって、次式で表わされる Lagrange 関数の最小化問題を考えればよい。

$$\bar{W} = (W_0 + \sum_{i=m+1}^n A_i L_i \rho_i) + \lambda \left( \sum_{i=m+1}^n \frac{F_i^p F_i^q L_i}{A_i E_i} + T_0 - T^* \right) \quad (9)$$

最小値は

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial A_j} = 0 = L_j \rho_j - \lambda \frac{F_j^p F_j^q L_j}{A_j^2 E_j} + \lambda \sum_{k=m+1}^n \left( \frac{\partial F_k^p}{\partial A_j} F_k^q + \frac{\partial F_k^q}{\partial A_j} F_k^p \right) \frac{L_k}{A_k E_k} \quad (10)$$

静定構造の場合、 $\Sigma$  内部の微分項は自平衡内力系を形づくる。この系の仮想仕事 ( $\Sigma$  部分) は、仮想変位の原理によってゼロである。したがって、式(10)は次式の

ようになる。

$$0 = L_j \rho_j - \lambda \frac{F_j^p F_j^q L_j}{A_j^2 E_j} \quad (11)$$

式(11)から

$$A_j = \sqrt{\lambda} \sqrt{\left( \frac{F_j^p F_j^q}{E_j \rho_j} \right)} \quad (12)$$

を得て、これを式(4)に代入すると

$$T^* = T_0 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=m+1}^n L_i \sqrt{\left( \frac{F_i^p F_i^q \rho_i}{E_i} \right)} \quad (13)$$

さらに次式の形に書き換えると

$$\sqrt{\lambda} = \frac{1}{(T^* - T_0)} \sum_{i=m+1}^n L_i \sqrt{\left( \frac{F_i^p F_i^q \rho_i}{E_i} \right)} \quad (14)$$

式(14)を式(12)に代入すると、次式を得る。

$$A_j = \frac{1}{(T^* - T_0)} \sum_{i=m+1}^n L_i \sqrt{\left( \frac{F_i^p F_i^q \rho_i}{E_i} \right)} \cdot \sqrt{\left( \frac{F_j^p F_j^q}{E_j \rho_j} \right)} \quad (15)$$

式(15)は次式のように書き換えることが出来る。

$$A_j = \sqrt{\left( \frac{F_j^p F_j^q}{E_j \rho_j} \right)} \times \frac{1}{(T^* - T_0)} \cdot \sum_{i=m+1}^n L_i \sqrt{\left( \frac{F_i^p F_i^q \rho_i}{E_i} \right)} \quad (16)$$

静定構造の場合は部材要素寸法の変化が内力の配分に影響することはないので、式(16)によって求まる。不静定構造の場合は部材要素寸法の変化が内力の配分に影響し繰り返し計算が必要なので(16)式を変形して、ステップ  $k$ ,  $k+1$  の関係として次式により求める。ここに  $\sigma_i^p$ ,  $\sigma_i^q$  は  $F_i^p$ ,  $F_i^q$  を応力で示したものである。

$$A_j^{k+1} = A_j^k \sqrt{\left( \frac{\sigma_j^p \sigma_j^q}{E_j \rho_j} \right)} \times \frac{1}{(T^* - T_0)} \cdot \sum_{i=m+1}^n (A_i L_i \rho_i) \sqrt{\left( \frac{\sigma_i^p \sigma_i^q}{E_i \rho_i} \right)} \quad (17)$$

(16)式、(17)式が変位制約のある最小重量設計において変数  $A_j$  が満たすべき規準値を示している。一般には  $m=0$  である。本論文で用いた手法の流れ図を Fig. 1 に示す。

### 3. 最適設計例

本研究で述べた手法による最適設計例として、静定構造物としては Fig. 2 に示す単純ワーレントラス橋、不静定構造物としては Fig. 3 に示す 2 径間連続ワーレントラス橋についての最適設計を行った。設計条件は Fig. 2, Fig. 3 に示すように静定構造物は単純ワーレントラスで

(a) 支間: 1600cm

(b) トラス高: 735.692cm

(c) 荷重: 2000ton (支間中央格点に載荷)

(d) 変位制約: 0.8cm (支間中央格点で下向の変位)

(e) 適用示方書: 鋼道路橋設計示方書

である。又

不静定構造物は二径間連続ワーレントラスで

(a) 支間: 2 @ 800cm = 1600cm

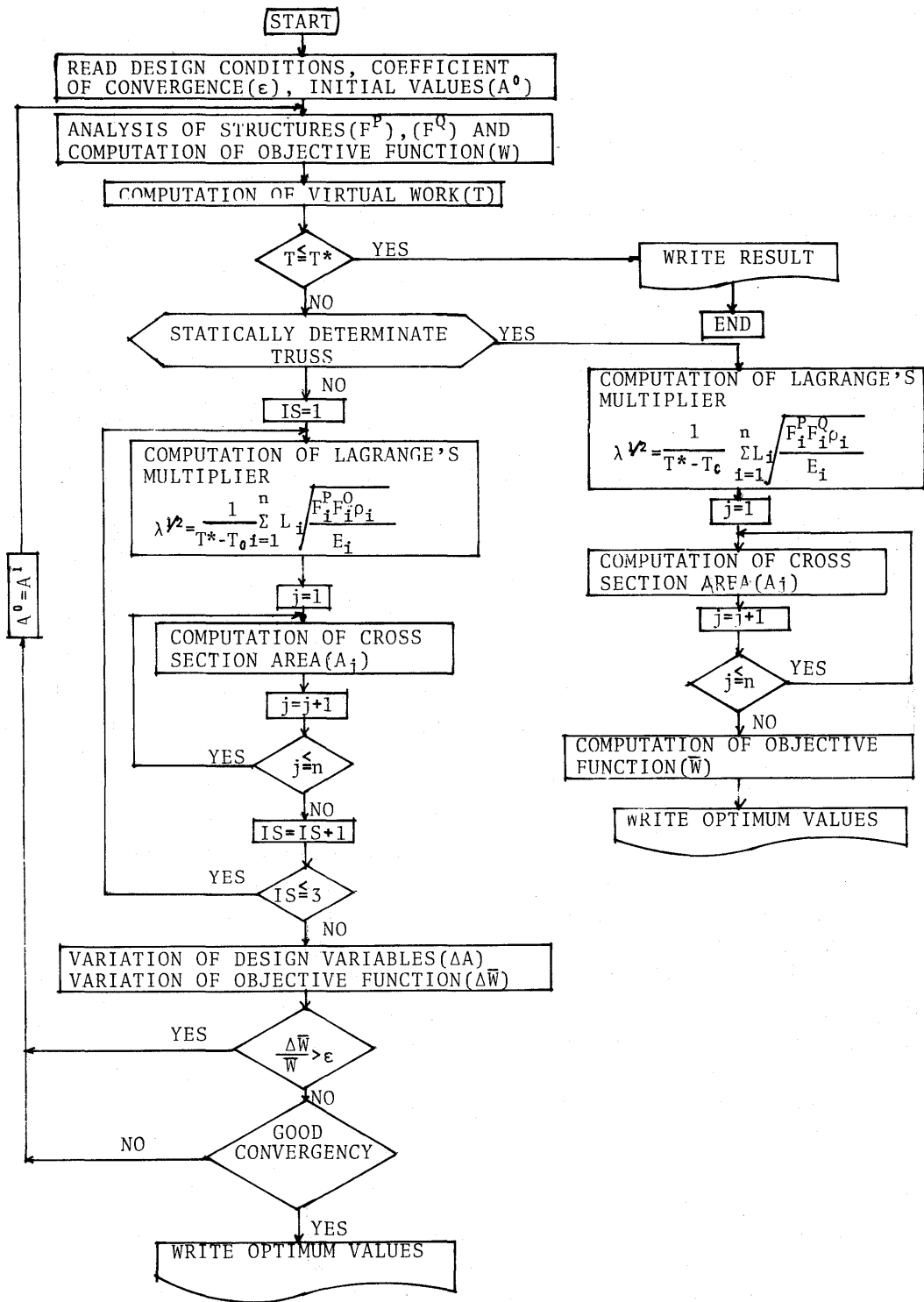


Fig. 1 Flow Chart of Optimum Design

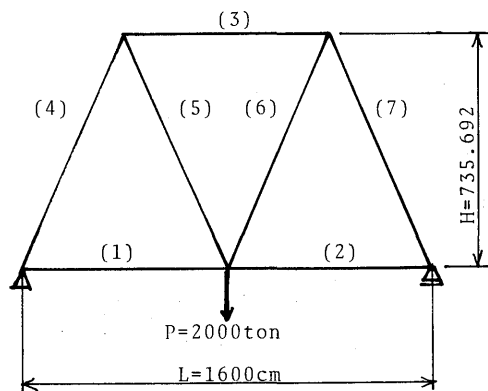


Fig. 2 Notation for Warren Truss

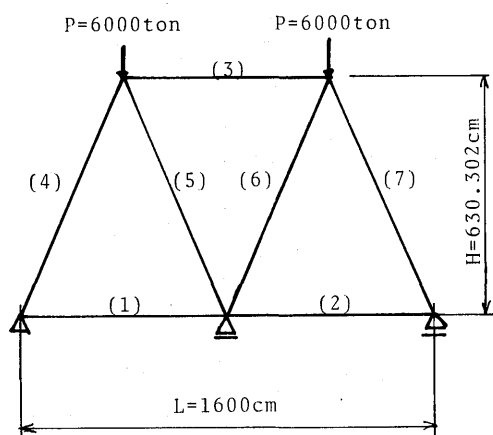


Fig. 3 Notation for Continuous Truss

- (b) トラス高：630,302cm  
 (c) 荷重：6000ton (上弦材両端格点に載荷)  
 (d) 変位制約：1.5cm (上弦材両端格点で下向の変位)  
 (e) 適用示方書：鋼道路橋設計示方書  
 である。  
 設計変数は部材断面積とし、最小重量設計とする。

Table 1 Optimum Values of Warren Truss-(a)

	initial value	optimum value
A(1)	1000.0000	898.4991
A(2)	1000.0000	898.4991
A(3)	1000.0000	1796.9980
A(4)	1500.0000	1881.0130
A(5)	1500.0000	1881.0130
A(6)	1500.0000	1881.0130
A(7)	1500.0000	1881.0130
W	30272.52	12365.04

Table 2 Optimum Values of Warren Truss-(b)

	initial value	optimum value
A(1)	800.0000	898.4991
A(2)	800.0000	898.4991
A(3)	1700.0000	1796.9980
A(4)	1800.0000	1881.0130
A(5)	1800.0000	1881.0130
A(6)	1800.0000	1881.0130
A(7)	1800.0000	1881.0130
W	16091.94	12365.04

制約条件式は変位制限のみとする。Table 1, Table 2 に単純ワーレントラスについて、初期値を変えて最適設計を行った結果を示す。之によると初期値を変えても最適値は全く同じ値に収束している。又 Table 3, Table 4 に連続ワーレントラスについて初期値を変えて最適設計を行った場合の収束状態を示す。

ここに IS は繰り返し回数である。この表によるといずれも 3 回で収束し、収束状態は良好である。初期値を変えても最適値はほとんど同じ値に収束している。ここに Table 1~Table 4 の A(1)~A(4) は断面積を示し単位は  $\text{cm}^2$  であり部材番号は Fig. 2, Fig. 3 に示す。又表中の  $\bar{W}$  は Lagrange 関数の値を示す。

Table 3 Situation of Convergency of Continuous Truss-(a)

IS	0	1	2	3
A(1)	1000.0000	1188.0230	1188.0230	1188.0230
A(2)	1000.0000	1188.0230	1188.0230	1188.0230
A(3)	1000.0000	375.1549	375.1549	375.1549
A(4)	1500.0000	2217.1850	2217.1850	2217.1850
A(5)	1500.0000	2917.3290	2917.3290	2917.3290
A(6)	1500.0000	2917.3290	2917.3290	2917.3290
A(7)	1500.0000	2217.1850	2217.1850	2217.1850
W	54855.53	12992.97	12992.97	12992.97

Table 4 Situation of Convergency of Continuous Truss-(b)

IS	0	1	2	3
A(1)	1200.0000	1181.4610	1181.4610	1181.4610
A(2)	1200.0000	1181.4610	1181.4610	1181.4610
A(3)	400.0000	388.2794	388.2794	388.2794
A(4)	2200.0000	2204.9380	2204.9380	2204.9380
A(5)	2900.0000	2929.5760	2929.5760	2929.5760
A(6)	2900.0000	2929.5760	2929.5760	2929.5760
A(7)	2200.0000	2204.9380	2204.9380	2204.9380
W	12999.75	12921.20	12921.20	12921.20

次に本手法の妥当性を検討するために Fig. 2 に示す単純ワーレントラスについて、SLP 法を用いて、応力制限、たわみ制限（支間中央格点において鉛直下方向に0.8cm）、座屈防止の細長比制限、局部座屈防止の部材の板幅に対する板厚制限、各変数の上下限制限の制約条件式のもとに、目的関数には鋼材費・工場製作費を考慮して次式で計算する。

$$\begin{aligned}
 Z &= \sum_k \sum_l \tilde{H}_{kl} (SMH) + \sum_i \sum_j H_{ij} (SMH) + \sum_j \rho \cdot V_j \cdot C (CM) \\
 &= Z_1 (SMH) + Z_2 (SMH) + Z_3 (CM) \\
 &= (CM) (Z_1 \mu + Z_2 \mu + Z_3)
 \end{aligned} \quad (18)$$

ここで  $\rho$  : 鋼材単位重量 (ton/cm<sup>3</sup>),  $C$  : 鋼材単価係数, (CM) : 鋼材の単価 (円/ton), (SMH) : 1人1時間当りの工数単価 (円/時間),  $\mu = (SMH) / (CM)$ ,  $\tilde{H}_{kl}$  :  $k$  工程,  $l$  部材の変数に関係ない作業工数 (時間)  $H_{ij}$  :  $i$  工程,  $j$  部材の設計変数の関数である作業工数 (時間),  $V_j$  :  $j$  部材の Volume (cm<sup>3</sup>) である。

$\rho = 0.785 \times 10^{-5}$  ton/cm<sup>3</sup>,  $C$  は鋼種, 板厚の関数である係数である。(CM) = 80000 円/ton, (SMH) = 4000 円/時, すなわち  $\mu = 4000/80000 = 0.05$  として計算した。

設計変数には板厚, コード幅, コード高, トラス高等のすべての断面寸法を採用した。

本研究による最適設計結果と前述の SLP 法による最適設計結果の比較表を Table 5 に示す。この表には断面積 A(1)~A(7) (cm<sup>2</sup>) の本手法による最適設計結果の最適値 : B (cm<sup>2</sup>), SLP 法による最適設計結果の最適値 : C (cm<sup>2</sup>), 本手法と SLP 法の最適値の比率 : B/C (%) を示す。Table 5 によると, 本手法と SLP 法の最適断面積を比較した場合, 変数 A(3)~A(7) についてはあまり大きい差はなく 10% 以下の違いである。之は SLP 法が費用を最小とし変数には板厚, 板幅等すべての断面寸法を考慮しているのに対して, 本手法は最小重量設計であり部材断面積のみを変数としているため

Table 5 Comparison of Optimum Values

	present technique B	SLP method C	ratio =B/C×100
A(1)	898.4991	1169.6100	76.82040
A(2)	898.4991	1169.6100	76.82040
A(3)	1796.9980	1869.7232	96.11037
A(4)	1881.0130	1913.8250	98.28552
A(5)	1881.0130	1733.3544	108.51866
A(6)	1881.0130	1733.3544	108.51866
A(7)	1881.0130	1913.8250	98.28552

である。下弦材の設計変数である断面積 A(1), A(2) は目的関数の違いと, SLP 法はすべての断面寸法を考慮しているためと, 板厚と板幅の比の制限, コード幅, コード高さの上限値制限に制約されたため, SLP 法の最適値は真の最適値になっていないためである。

#### 4. 結 果

本手法によれば, 変数の初期値が異なっても同じ値に収束している所から, 全域的最適解が得られたものと思われる。目的関数として費用を考慮し, 制約条件式としてすべての制限を考慮した SLP 法と比較するとやや誤差が大きいが, 変位制約のみを考慮した最小重量設計であれば, 最適部材断面積を効率的に求めることが出来るので, 本手法により各部材の最適断面積を求め, その後 SLP 法を用いた Suboptimization により, 最適値を求めることによって, 長大化し複雑化した構造物も, 効果的に最適値を求めることが可能である。

#### 5. あとがき

本論文の計算には長崎大学 FACOM・M-180, 九州大学 FACOM・M-200 を使用した。御援助いただいた計算センターの方々に感謝する。

## 参考文献

- 1) 小西保則；Suboptimization によるトラスの最適設計，土木学会昭和54年度西部支部学術講演会概要集，(1972, 2)，PP. 17～18
- 2) 小西保則；Suboptimization によるトラスの最適設計(第2報)，土木学会第35回年次学術講演会概要集 I，(1980.10)，PP. 691～692
- 3) R. H. ギャラガー，O. C. ツインキヴィッツ共編，川井忠彦・戸川隼人訳；最適構造設計．基礎と応用，(1977)，PP. 31～45，培風館